

Équation et inéquation du premier degré à une inconnue

1 ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ À UNE INCONNUE

Définition 1

On appelle équation du premier degré à une inconnue x toute équation qui peut s'écrire sous la forme : $ax + b = 0$ où a et b sont deux réels donnés.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les solutions.

Exemples : Résolvons les équations suivantes :

1) $x\sqrt{3} + 2 = x\sqrt{27} + 1$
 $(\sqrt{3} - \sqrt{27})x = -1$
 $(\sqrt{3} - 3\sqrt{3})x = -1$
 $-2\sqrt{3}x = -1$
 $x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$
 $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$
 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ est la solution unique
de cette équation.

2) $\frac{x-2}{4} - \frac{x}{6} = 1 - \frac{4-x}{12}$
 $\frac{3(x-2)}{12} - \frac{2x}{12} = \frac{12}{12} - \frac{(4-x)}{12}$
 $3x - 6 - 2x = 12 - 4 + x$
 $x - 6 = 8 + x$
 $0x = 14$
 $0 = 14$ impossible
L'équation proposée n'a pas
de solution.

3) $(x-2)(x-1) - 5 = x(x-2) - (3+x)$
 $x^2 - x - 2x + 2 - 5 = x^2 - 2x - 3 - x$
 $x^2 - 3x - 3 = x^2 - 3x - 3$
 $x^2 - 3x - x^2 + 3x = -3 + 3$
 $0x = 0$;
ceci est vraie pour tout réel x .
Tous les nombres réels sont
solutions de cette équation.

2 ÉQUATION DE LA FORME $(ax + b)(cx + d) = 0$

Propriété 1

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

Autrement dit : α et β sont deux nombres réels : $\alpha \times \beta = 0$ signifie : $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.

Propriété 2

a , b et c sont des nombres réels.

Les solutions de l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$ sont les solutions des deux équations : $ax + b = 0$ et $cx + d = 0$.

Exemple : Résolvons l'équation : $(x\sqrt{2} - 3)(-x + \sqrt{3}) = 0$

On a : $(x\sqrt{2} - 3)(-x + \sqrt{3}) = 0$

c'est-à-dire : $x\sqrt{2} - 3 = 0$ ou $-x + \sqrt{3} = 0$

Équation et inéquation du premier degrés à une inconnue

$$x\sqrt{2} - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad -x + \sqrt{3} = 0$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{3}$$

Cette équation admet donc deux solutions : $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $\sqrt{3}$.

3 INÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ À UNE INCONNUE

Définition 2

On appelle inéquation du premier degré à une inconnue x toute inéquation qui peut s'écrire sous la forme : $ax + b \leq 0$ ou $ax + b < 0$, où a et b sont deux réels donnés.

Résoudre une inéquation, c'est déterminer toutes ses solutions.

Exemples : Résolvons les inéquations suivantes :

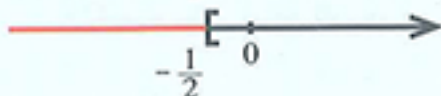
1) $4x + 3 < 1$

$$4x < 1 - 3$$

$$x < -\frac{2}{4}$$

$$x < -\frac{1}{2}$$

Les solutions de cette inéquation sont les nombres réels strictement inférieurs à $-\frac{1}{2}$.

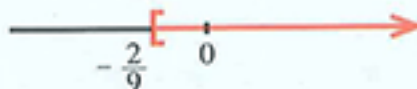


2) $-2x \leq \frac{4}{9}$

$$x \geq \frac{4}{9} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \quad (\text{car } -\frac{1}{2} < 0)$$

$$x \geq -\frac{2}{9}$$

Les solutions de cette inéquation sont les nombres réels supérieurs ou égaux à $-\frac{2}{9}$.



4 MISE EN ÉQUATION OU EN INÉQUATION D'UN PROBLÈME

Pour résoudre un problème, on respecte les étapes suivantes:

- 1 Choix de l'inconnue.
- 2 Mise en équation ou en inéquation (on traduit chaque donnée en fonction de l'inconnue).
- 3 Résolution de l'équation ou de l'inéquation.
- 4 Vérification et interprétation du résultat.

1 RÉSOUDRE UNE ÉQUATION EN FACTORISANT

Exemple 1

Résoudre chacune des équations suivantes :

1 $(x\sqrt{2} - 1)^2 - 4x^2\sqrt{2} + 4x = 0.$

2 $9x^2 - 12x + 4 = 3.$

1 Résolution de l'équation : $(x\sqrt{2} - 1)^2 - 4x^2\sqrt{2} + 4x = 0.$

Si un facteur commun existe, ça ne peut être : $x\sqrt{2} - 1$

Ainsi l'équation devient : $(x\sqrt{2} - 1)^2 - 4x(x\sqrt{2} - 1) = 0$
 $(x\sqrt{2} - 1)[(x\sqrt{2} - 1) - 4x] = 0$
 $(x\sqrt{2} - 1)[(\sqrt{2} - 4)x - 1] = 0$

Ce produit est nul lorsque : $x\sqrt{2} - 1 = 0$ ou $(\sqrt{2} - 4)x - 1 = 0$
 $x\sqrt{2} = 1$ ou $(\sqrt{2} - 4)x = 1$
 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = \frac{1}{\sqrt{2} - 4}$
 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = \frac{-4 - \sqrt{2}}{14}$

Donc les solutions de l'équation sont : $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{2}{7} - \frac{\sqrt{2}}{14}.$

2 Résolution de l'équation : $9x^2 - 12x + 4 = 3.$

On constate que le premier membre de cette équation est une identité remarquable de la forme : $a^2 - 2ab + b^2.$

L'équation devient : $(3x - 2)^2 = (\sqrt{3})^2$

On sait que : $a^2 = b^2$ signifie que $a = b$ ou $a = -b.$

Donc : $3x - 2 = \sqrt{3}$ ou $3x - 2 = -\sqrt{3}$
 $3x = 2 + \sqrt{3}$ ou $3x = 2 - \sqrt{3}$
 $x = \frac{2 + \sqrt{3}}{3}$ ou $x = \frac{2 - \sqrt{3}}{3}$

D'où les solutions de l'équation sont : $\frac{2 + \sqrt{3}}{3}$ et $\frac{2 - \sqrt{3}}{3}.$

Pratique : Problèmes

2 RÉSoudre UN PROBLÈME

Exemple 2

La somme des âges d'une personne P, de sa mère et de sa grand-mère est 135 ans.

La grand-mère a le triple de l'âge de la mère et l'âge de P est la moitié de celui de la mère.

Quel est l'âge de chacune de ces personnes ?

- 1 **Choix de l'inconnue** : Soit x l'âge de la mère, contraire de l'âge : x doit être strictement positif.

Bien souvent l'énoncé du problème impose des contraintes concernant l'inconnue

- 2 **Mise en équation** : L'âge de la grand-mère est $3x$.

L'âge de la personne P est $\frac{1}{2}x$ on obtient l'équation $x + 3x + \frac{1}{2}x = 135$

- 3 **Résolution de l'équation** : $x + 3x + \frac{1}{2}x = 135$

$$\text{Donc : } 4x + \frac{1}{2}x = 135$$

$$\frac{8x + x}{2} = \frac{270}{2}$$

$$9x = 270$$

$$x = 30.$$

- 4 **Retour au problème (vérification)** $30 + 3 \times 30 + \frac{1}{2} \times 30 = 30 + 90 + 15 = 135$

Conclusion : L'âge de la mère est 30 ans, celui de la grand-mère est 90 ans et P a 15 ans.

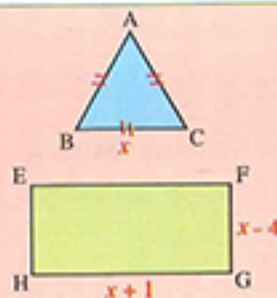
Exemple 3

ABC est un triangle équilatéral de côté x .

EFGH est un rectangle (voir figure).

x est un réel strictement supérieur à 4.

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles le périmètre du rectangle est strictement inférieur à celui du triangle.



Le périmètre du rectangle EFGH est : $2[(x+1) + (x-4)] = 2(2x-3) = 4x-6$.

Le périmètre du triangle ABC est : $3x$.

On obtient ainsi l'inéquation : $4x-6 < 3x$

$$\text{donc : } 4x - 3x < 6 \quad \text{c'est-à-dire : } x < 6$$

Comme $4 < x$, alors les valeurs que peut prendre x sont strictement comprises entre 4 et 6 : $4 < x < 6$.