

Racines, puissances, identités remarquables, équations

A. Racines carrées : (rappel de 3^{ème})

Définition : Soit a un nombre réel **positif**. La racine carrée de a est l'unique nombre réel **positif** dont le carré est égal à a . On le note $\sqrt{a}$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

.

Exemple : $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{9} = 3$

Propriétés de la racine carrée :

Soient a et b deux nombres réels positifs.

- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ je déduis $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{a}$
- Si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- Si a et b sont des réels strictement positifs, alors $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

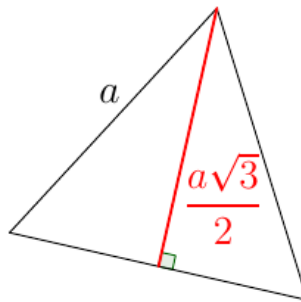
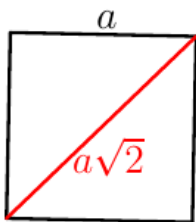
La racine carrée en géométrie :

- la diagonale d'un carré de côté a

a pour longueur $a\sqrt{2}$

• .

- la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a a pour longueur : $\frac{a\sqrt{3}}{2}$



B. Puissances

Définition : Soit a

un nombre réel positif et n un entier strictement positif. On note

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

On convient pour a non nul, $a^0 = 1$

Si $a \neq 0$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \times a \times \dots \times a}$.

Exemple : $10^4 = 10\,000$; $3^{-2} = \frac{1}{9}$

Propriétés des puissances:

Soient a

et b deux nombres réels non nuls, m et n deux entiers relatifs. Alors

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- $a^m \times b^m = (ab)^m$
- $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Définition :

On appelle **écriture scientifique** d'un nombre décimal positif x son écriture sous la forme $a \times 10^n$ où n est un nombre entier relatif et a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$

C. Identités remarquables - Calcul littéral

Définition :

- Développer un produit signifie écrire un produit sous la forme d'une somme.
- Factoriser une somme signifie écrire cette somme sous la forme d'un produit.

Pour développer et factoriser, on s'appuie sur les formules de distributivité et double distributivité.

$$k(a + b) = ka + kb.$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemples :

- Développons

$$(x + 1)(x - 2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$$

- Factorisons :

$$x^3 - 2x^2 = x \times x^2 - 2 \times x^2 = x^2(x - 2)$$

Identités remarquables :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

D. Équations

Équations produit et équations quotient :

- un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
- un quotient est nul si et seulement si le numérateur est nul et le quotient est bien défini.
- produit en croix : si $b \neq 0$ et $d \neq 0$, alors

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si et seulement si } ad = bc$$

.

Par exemple, si on veut résoudre l'équation $(3x + 1)(x - 5) = 0$

, on sait qu'elle est équivalente à $3x + 1 = 0$ ou $x - 5 = 0$ ou $x - 3 = 0$.

Or, $3x + 1 = 0$ a pour solution $x = -\frac{1}{3}$ et $x - 5 = 0$ a pour solution $x = 5$. Les solutions de l'équation $(3x + 1)(x - 5) = 0$ sont donc $-\frac{1}{3}$ et 5

Ou on écrit : $S = \left\{ -\frac{1}{3} ; 5 \right\}$

.

Équations avec des carrés : L'équation $x^2 = a$

- n'admet pas de solutions si $a < 0$
- admet 0 pour unique solution si $a = 0$
- admet $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ pour solutions si $a > 0$

Équations avec des racines carrées :

L'équation $\sqrt{x} = a$

- n'admet pas de solutions si $a < 0$.
- admet a^2 pour unique solution si $a \geq 0$.