

NOTION DE LOGIQUE

1^{er} BAC

1. PROPOSITION

Une proposition est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

2. OPÉRATIONS LOGIQUES

2.1. L'opérateur logique « et »

La proposition « P et Q » est vraie si P est vraie et Q est vraie. La proposition « P et Q » est fausse sinon.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

2.2. L'opérateur logique « ou »

La proposition « P ou Q » est vraie si l'une (au moins) des deux propositions P ou Q est vraie. La proposition « P ou Q » est fausse si les deux propositions P et Q sont fausses.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

2.3. La négation « non »

La proposition « non P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

On note $\neg P$ la négation de la proposition P.

P	$\neg P$
V	F
F	V

2.4. L'implication $\Rightarrow$

La proposition « $(\neg P) \vee Q$ » est notée « $P \Rightarrow Q$ ».

La proposition « $P \Rightarrow Q$ » se lit en français « P implique Q ». Elle se lit souvent aussi « si P est vraie alors Q est vraie » ou « si P alors Q ».

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

2.5. L'équivalence $\Leftrightarrow$

L'équivalence est définie par :

$P \Leftrightarrow Q$ est la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

On dira « P est équivalent à Q », ou « P équivaut à Q », ou « P si et seulement si Q ».

Cette proposition est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

3. LOI LOGIQUE OU UNE TAUTOLOGIE

Définition : On appelle une loi logique toute proposition constituée par des propositions liées entre elles par des connexions logiques et qui est toujours vraie, quelle que soit la valeur de vérité des propositions qui la constituent.

Une loi logique s'appelle aussi une tautologie.

Proposition 1 : Soient P , Q , R trois propositions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

1. $P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$
2. $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$
3. $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$
4. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$
5. $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$

6. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
7. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
8. $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$

4. QUANTIFICATEURS ET FONCTION PROPOSITIONNELLE

Si une proposition P dépend d'un paramètre x , on l'appelle fonction propositionnelle.

4.1. Définition

Une fonction propositionnelle sur un ensemble E est une expression contenant une ou plusieurs variables libres dans E et qui est susceptible de devenir une proposition vraie ou fausse si l'on attribue à ces variables certaines valeurs particulières de l'ensemble E .

4.2. Le quantificateur $\forall$: « pour tout »

On lit « Pour tout x appartenant à E , $P(x)$ ».

Sous-entendu : « Pour tout x appartenant à E ; $P(x)$ est vraie ».

Exemple :

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad x^2 \geq 1$$

est une proposition vraie.

4.3. Le quantificateur $\exists$: « il existe »

La proposition

$$\exists x \in E: P(x)$$

est une proposition vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel $P(x)$ est vraie.

On lit « il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie) ».

Exemples :

1. $\exists n \in \mathbb{N}: n^2 \geq n$ est vraie (il y a plein de choix, par exemple $n = 3$ convient, mais aussi $n = 10$ ou même $n = 100$; un seul suffit pour dire que la proposition est vraie).
2. $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = -1$ est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif).

4.4. La négation des quantificateurs

La négation de $\forall x \in E: P(x)$ est $\exists x \in E: \neg P(x)$.

La négation de $\exists x \in E: P(x)$ est $\forall x \in E: \neg P(x)$.

Remarques

1. *L'ordre des quantificateurs est très important.*

2. *Quand on écrit* $\exists x \in \mathbb{R}: f(x) = 0,$

cela signifie juste qu'il existe au moins un réel pour lequel f s'annule. Rien ne dit que ce x est unique. Afin de préciser que f s'annule en une unique valeur, on rajoute un point d'exclamation : $\exists! x \in \mathbb{R}: f(x) = 0.$

3. *Pour la négation d'une phrase logique, il n'est pas nécessaire de savoir si la phrase est fausse ou vraie. Le procédé est algorithmique : on change le « pour tout » en « il existe » et inversement.*