

1 Généralités sur les suites numériques

Soit n_0 un entier naturel. On pose : $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

1- Définition et Notation

DÉFINITION

Toute fonction numérique u définie sur I est appelée suite numérique. L'image par u d'un entier n de I est notée u_n et se lit : « u indice n » ou simplement « u_n »

u_n est appelé le terme général de la suite u .

Notation

Une suite numérique u se note $(u_n)_{n \in I}$ ou $(u_n)_{n \geq n_0}$

si $I = \mathbb{N}$, u se note (u_n) ou $(u_n)_n$ ou $(u_n)_{n \geq 0}$ ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

si $I = \mathbb{N}^*$, u se note $(u_n)_{n \geq 1}$ ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

le réel u_{n_0} est le premier terme de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Exemples :

1. $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ se note $(2n+1)_n$ ou $((u_n)_n$ où $u_n = 2n+1$ et son premier terme est $u_0 = 1$).

2. $v: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ se note $(1 + \frac{2}{n})_{n \geq 1}$ ou $((v_n)_{n \geq 1}$ où $v_n = 1 + \frac{2}{n}$ et son premier terme est $v_1 = 3$.
 $n \mapsto 1 + \frac{2}{n}$

3. $w: \mathbb{N} - \{0; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ est la suite de terme général $w_n = \frac{n+2}{n(n-1)}$ pour tout $n \geq 2$
 $n \mapsto \frac{n+2}{n(n-1)}$

w se note $(w_n)_{n \geq 2}$ et son premier terme est $w_2 = 2$.

2- Deux façons de définir une suite

a) Suites définies par la donnée explicite de leurs termes

Exemples :

1. $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $(v_n)_n$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = f(n)$ où f est une fonction numérique.

Par exemple : $v_n = \frac{2n+1}{n+2}; n \in \mathbb{N}$ où $f: x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}$

3. $(w_n)_n$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); w_n = \frac{2^n}{n}$

b) Suites définies implicitement

On s'intéresse dans cette leçon aux suites définies par récurrence, c'est-à-dire les suites définies par la donnée du premier terme (ou des premiers termes) et une relation dite de récurrence, qui permet de calculer un terme à partir d'un ou de plusieurs termes précédents.

Exemples :

1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$

on a : $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$

$u_2 = \frac{2}{3}u_1 + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} + 1 = \frac{19}{9}$

2. $\begin{cases} v_0 = -1 \text{ et } v_1 = 2 \\ v_{n+2} = 2v_n + 3v_{n+1} \end{cases}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$

on a : $v_2 = 2v_0 + 3v_1 = -2 + 6 = 4$

$v_3 = 2v_1 + 3v_2 = 4 + 12 = 16$

2 Suites majorées - suites minorées - suites bornées

DÉFINITION

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ et soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique.

1. Dire que $(u_n)_{n \in I}$ est **majorée** signifie qu'il existe un réel M tel que, pour tout $(n \in I)$; $u_n \leq M$.
2. Dire que $(u_n)_{n \in I}$ est **minorée** signifie qu'il existe un réel m tel que, pour tout $(n \in I)$; $m \leq u_n$.
3. Une suite à la fois minorée et majorée est dite suite **bornée**.

Exemple : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{n}{n+2}$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n$ donc la suite $(u_n)_n$ est minorée par 0.

et on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq 1$ (car $n \leq n+2$)

donc la suite $(u_n)_n$ est majorée par 1.

Ainsi $(u_n)_n$ est à la fois minorée et majorée, elle est donc bornée.

Propriété

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique où $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

$(u_n)_{n \in I}$ est une suite bornée si et seulement s'il existe un réel α strictement positif tel que : $(\forall n \in I) ; |u_n| \leq \alpha$

3 Monotonie d'une suite

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

DÉFINITION

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique, où

1. On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est croissante si : $\forall (n; m) \in I^2 ; n > m \Rightarrow u_n \geq u_m$.
2. On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante si : $\forall (n; m) \in I^2 ; n > m \Rightarrow u_n \leq u_m$.
3. On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est strictement croissante si : $\forall (n; m) \in I^2 ; n > m \Rightarrow u_n > u_m$.
4. On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est strictement décroissante si : $\forall (n; m) \in I^2 ; n > m \Rightarrow u_n < u_m$.
5. On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est constante si et seulement si : $\forall (n; m) \in I^2 ; u_n = u_m$.

Propriété

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique.

1. la suite $(u_n)_{n \in I}$ est croissante si et seulement si $(\forall n \in I) ; u_{n+1} \geq u_n$.
2. la suite $(u_n)_{n \in I}$ est strictement croissante si et seulement si $(\forall n \in I) ; u_{n+1} > u_n$.
3. la suite $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante si et seulement si $(\forall n \in I) ; u_{n+1} \leq u_n$.
4. la suite $(u_n)_{n \in I}$ est strictement décroissante si et seulement si $(\forall n \in I) ; u_{n+1} < u_n$.
5. la suite $(u_n)_{n \in I}$ est constante si et seulement si $(\forall n \in I) ; u_{n+1} = u_n$.

Exemple :

1. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{1}{n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$, d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} < u_n$.

Ainsi $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

2. Soit $(v_n)_n$ la suite définie par:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \frac{1}{2} \times 3^n$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N} \text{ on a : } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2} \times 3^n$$

$$= \frac{1}{2} \times 3^n (3 - 1)$$

$$= 3^n$$

Donc $v_{n+1} - v_n > 0$; d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} > v_n$.

Ainsi $(v_n)_n$ est strictement croissante.

4 Suites arithmétiques

DÉFINITION

Dire qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **arithmétique** signifie qu'il existe un nombre réel r tel que, $(\forall n \geq n_0); u_{n+1} = u_n + r$, le nombre r est appelé la **raison** de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Autrement dit:

Une suite est arithmétique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant le même nombre.

Exemple : $(u_n)_n$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 2n + 5$ est une suite arithmétique.

en effet: $u_{n+1} = 2(n+1) + 5 = 2n + 2 + 5 = (2n + 5) + 2$.

Donc : $u_{n+1} = u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi : $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$.

Propriétés

Propriété 1 : (Terme général d'une suite arithmétique)

Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} alors : $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$ pour tout $n \geq n_0$.

En particulier: si $n_0 = 0$ on a $u_n = u_0 + nr$

si $n_0 = 1$ on a $u_n = u_1 + (n - 1)r$.

— **Conséquence:** Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r alors :

$$(\forall n \geq n_0); (\forall p \geq n_0); u_n = u_p + (n - p)r$$

Exemple 1 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ et $u_6 = 31$.

Calculons u_{2018} .

$$\text{On a : } u_{2018} = u_6 + (2018 - 6)\left(\frac{1}{2}\right) = 31 + 1006$$

$$\text{donc : } u_{2018} = 1037$$

Exemple 2 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r tel que, $u_0 = 5$ et $u_{100} = -45$.

Déterminons r et u_n en fonction de n .

$$\text{On a : } u_{100} = u_0 + 100r = 5 + 100r. \text{ Donc : } 100r = u_{100} - 5 = -50$$

$$\text{D'où : } r = -\frac{1}{2} \text{ et par suite } u_n = u_0 + nr = 5 - \frac{1}{2}n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Propriété 2 : Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique.

On pose : $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$ où $n_0 \leq p < n$

$$\text{On a : } S_n = (n - p + 1) \left(\frac{u_p + u_n}{2} \right)$$

— **Cas particuliers :**

$$1. p = n_0 = 0 ; S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

$$2. p = n_0 = 1 ; S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = n \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right)$$

5 Suites géométriques

DÉFINITION

Dire qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **géométrique** signifie qu'il existe un réel q tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = q \times u_n$. Le réel q est appelé **la raison** de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Autrement dit:

Une suite est géométrique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par un même nombre.

Exemple : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}u_n$. Donc : $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

Propriétés 1: (Terme général d'une suite géométrique)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q non nul.

1. Pour tout $n \geq n_0$, on a : $u_n = u_{n_0} \times q^{n-n_0}$

2. Pour tout $n \geq n_0$ et $p \geq n_0$, on a : $u_n = u_p \times q^{n-p}$

En particulier : si $n_0 = 0$ on a : $u_n = u_0 q^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

si $n_0 = 1$ on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Exemple : $(u_n)_n$ est une suite géométrique

telle que : $u_2 = \frac{3}{16}$ et $u_5 = \frac{3}{1024}$.

Déterminons u_n en fonction de n .

Soit q la raison de cette suite.

$$\text{On a : } u_5 = u_2 \times q^3 \text{ donc : } q^3 = \frac{u_5}{u_2} = \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$\text{Donc : } q = \frac{1}{4} \text{ d'où : } u_n = u_2 \times q^{n-2} = \frac{3}{16} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$$

$$\text{D'où : } u_n = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Propriétés 2: (Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)

Pour tout $q \in \mathbb{R}^* - \{1\}$, on a : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Propriétés 3:

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q ; $(q \in \mathbb{R}^* - \{1\})$.

On pose : $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$ où : $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq n_0$

$$\text{On a : } S_n = u_p \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$$

Remarque

si $q = 1$ alors : $S_n = (n - p + 1)u_p = (\text{nombre de termes}) \times 1^{\text{er}} \text{ terme}$.

Cas particuliers : Pour $n_0 = 0$ et $p = 0$: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$

Pour $n_0 = 1$ et $p = 1$: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$

Exemple : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique

telle que : $u_2 = \frac{3}{4}$ et $u_5 = \frac{3}{32}$

Calculons $S = u_2 + u_3 + \dots + u_{11}$

Soit q la raison de cette suite.

$$\text{On a : } u_5 = u_2 \times q^3 \text{ donc : } \frac{u_5}{u_2} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\text{D'où : } q = \frac{1}{2}$$

$$\text{et par suite : } S = u_2 \left(\frac{1 - q^{10}}{1 - q} \right)$$

$$\text{c'est-à-dire : } S = \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right)$$