

TRIGONOMÉTRIE partie 1.

(S.EL MOUMNI)

I) Le radian et le cercle trigonométrique

1) Soit un cercle C de centre O et de rayon 1.

On appelle **radian** (rad) la mesure de l'angle au centre interceptant un arc de longueur 1.

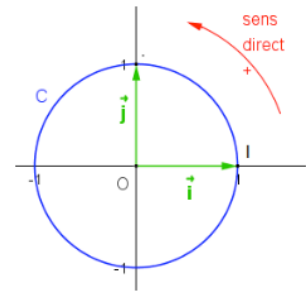
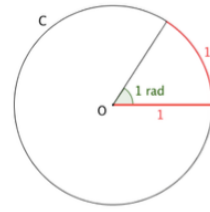
2) On appelle cercle trigonométrique tout cercle de centre O et de rayon 1 muni d'un point d'origine I et orienté dans le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre).

3) Relation entre radians et degrés :

$$\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180} \quad x \text{ en radian et } y \text{ en degrés}$$

4) Correspondance radians / degrés :

$x \text{ en rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$y \text{ en degrés}$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°



II) Abscisse curviligne d'un point sur le cercle trigonométrique :

Tout point M du cercle trigonométrique possède des abscisses curvilignes de la forme $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. (α est la longueur de l'arc)

Deux abscisses x et x' d'un même point vérifient : $x - x' = 2k\pi$.

On écrit $x \equiv x' [2\pi]$. Et on lit (x congrue à x modulo 2π)

L'abscisse curviligne principale appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

III) Relation de Chasles

1) Soit $[Ox]$, $[Oy]$. Et $[Oz]$ trois demi-droites d'origine O

. On a : $\overline{(Ox ; Oy)} + \overline{(Oy ; Oz)} \equiv \overline{(Ox ; Oz)} [2\pi]$

$$\overline{(0x; 0y)} \equiv -\overline{(0y; 0x)} \quad [2\pi]$$

2) L'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre est noté $(\vec{u}; \vec{v})$.

On a : $(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) \equiv (\vec{u}; \vec{w}) \quad [2\pi] \quad (\text{Relation de Chasle})$

$$(\vec{v}; \vec{u}) \equiv -(\vec{u}; \vec{v}) \quad [2\pi]$$

$$(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$$

$$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$$

$$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$$

IV) Rapports trigonométriques

Pour un réel x il existe un point M du cercle trigonométrique.

$\cos(x)$ est l'abscisse de M et $\sin(x)$ est son ordonnée.

-Soit (Δ) la droite tangente à (C) en I

Si $M \neq J$ et $M \neq J'$ alors la droite (OM) coupe la tangente (Δ) en un point T

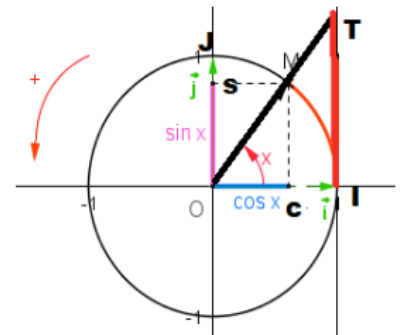
Le nombre réel $\overline{IT}$ l'abscisse de T sur l'axe (Δ) est la

tangente du nombre réel x et on note **tan** x .

$\tan x$ existe ssi : $x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

La cotangente de x est le nombre réel x noté cotant x et on a :

$$\cotan x = \frac{1}{\tan x}$$



Angles remarquables

0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Propriétés :

Pour tout nombre réel x , on a :

- 1) $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
- 2) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- 3) $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$
- 4) $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif
- 5) Si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- 6) Si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors $\tan(x + k\pi) = \tan x$.
- 7) $1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- 8) $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$
- 9) $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- 10) $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$
- 11) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- 12) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- 13) $\tan(\pi - x) = -\tan x$ et $\tan(\pi + x) = \tan x$ avec $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

