LES ENSEMBLES DE NOMBRES

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{R}$

Présenté par :

S. EL MOUMNI

www.monecole.casa

Tronc commun science

Objectifs pédagogiques

- Comprendre et maîtriser les définitions des ensembles de nombres.
- Identifier les relations d'inclusion entre les ensembles.
- Représenter les ensembles sur une droite graduée ou un diagramme de Venn.
- Appliquer les règles de calcul de base (fractions, racines, puissances).
- Distinguer nombres décimaux, rationnels et irrationnels.

1. Les nombres entiers

1. 1 L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Définitions et notation :

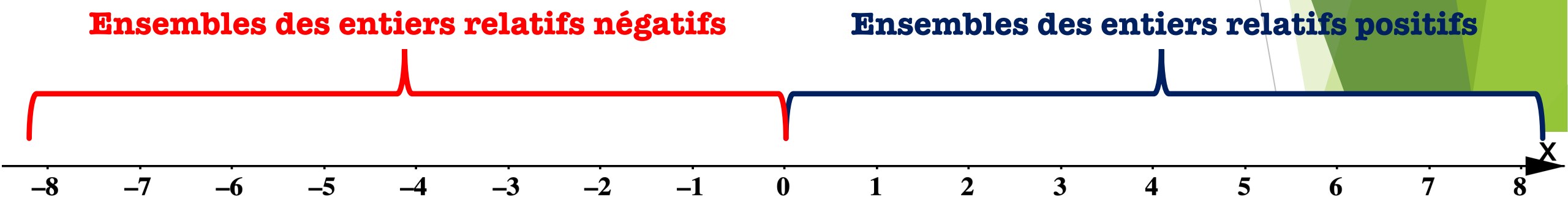
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: ensemble des entiers naturels non nuls.

1.2 L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$

- Définitions et notations :
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}^*$: entiers relatifs non nuls : $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{Z}^+$: entiers positifs et nuls, $\mathbb{Z}^-$: entiers négatifs et nuls.
- 0 est un nombre particulier : à la fois positif et négatif.

0 est un relatif positif et négatif . C'est l'intersection de $\mathbb{Z}_+$ *et* $\mathbb{Z}_-$.

On écrit : $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{0\}$



$\mathbb{Z}_-$

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$, *donc* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. *On lit* $\mathbb{N}$ *est inclus dans* $\mathbb{Z}$.

on en déduit $\mathbb{N}$ *est une partie de* $\mathbb{Z}$

2. L'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$

un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

Exemples : $123{,}45$ *;* $-5{,}004$

$\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots$ *n'est pas un nombre décimal car son développement possède une infinité du chiffre 6 après la virgule.*

Définition : un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme : $\frac{n}{10^m}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$

Exemples : $123{,}45 = \frac{12345}{10^2}$; $-5{,}004 = \frac{-5004}{10^3}$

Les parties de $\mathbb{D}$:

- $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\} = \left\{ \frac{n}{10^m} : \ n \in \mathbb{Z}^* \ et \ m \in \mathbb{N} \right\}$ est l'ensemble des nombres décimaux non nuls.
- $\mathbb{D}_+ = \left\{ \frac{n}{10^m} : \ n \in \mathbb{N} \ et \ m \in \mathbb{N} \right\}$ est l'ensemble des décimaux positifs.
- $\mathbb{D}_- = \left\{ \frac{n}{10^m} : \ n \in \mathbb{Z}_- \ et \ m \in \mathbb{N} \right\}$ est l'ensemble des décimaux positifs.
- Tout entier est un nombre décimal (ex : 7 = 7,0. ou $7 = \frac{7}{10^0}$).

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}. \left(\ a = \frac{a}{1} = \frac{a}{10^0} . avec \ a \ un \ entier \ relatif \right)$$

3.Les nombres rationnels

Rappel : un nombre rationnel est le quotient(fraction) de deux nombres relatifs.

$\frac{2}{3}$ *n'est pas un nombre décimal , c'est un nombre rationnel .*

Autrement dit : $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \ : \ a \in \mathbb{Z} \ et \ b \in \mathbb{Z}^*\}$

Exemples : $\frac{-2}{3}$; $\frac{31}{15}$; $1,4 = \frac{7}{5}$; $-0,7 = \frac{-7}{10}$

- *Leur développement décimal est périodique ou fini.*
- *Tout nombre décimal s'écrit sous forme* $\frac{n}{10^m}$, **alors** $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Développement décimal des nombres rationnels

- $\frac{2}{5} = 0,4$ donc $\frac{2}{5}$ possède un développement décimal fini.
- $\frac{1}{3} = 0,3333$ donc $\frac{1}{3}$ possède un développement décimal périodique et de période 3.
- Tout nombre rationnel admet une *infinité de représentants*, par exemple :
  - $\frac{1}{7} = \frac{2}{14} = \frac{3}{21} = \frac{-1}{-7} = \ldots\ldots$
- Le *représentant privilégié* est la fraction $\frac{1}{7}$, car elle est *irréductible*.
- Rappelons qu'une fraction $\frac{a}{b}$ avec a ∈ Z et b ∈ Z* est irréductible si et seulement si *a* et *b* n'ont pas de diviseur commun (autre que 1) , i.e. pgcd(a , b)=1. (a et b sont premiers entre eux)

- **Considérons maintenant le développement décimal de quelques nombres rationnels :**

$$\frac{1}{9} = 0,1111 \ldots = 0,\overline{1}$$

$$\frac{1}{6} = 0,16666 \ldots = 0,1\overline{6}$$

$$\frac{1}{101} = 0,1188\ 1188\ \ldots = 0,\overline{1188}$$

4.Les nombres réels $\mathbb{R}$

4.1 Les nombres irrationnels $\mathbb{I}$

Définition : *un nombre irrationnel est un nombre réel qui ne peut pas s'écrire comme une fraction d'entiers.*

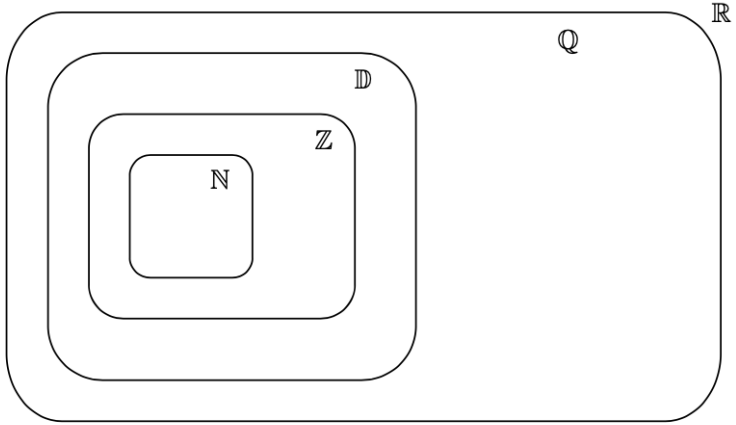
Son développement décimal est illimité et non périodique.

Exemples : $\pi = 3,14159...$, $\sqrt{2} \approx 1,414213...$, $e \approx 2,71828...$

Les nombres rationnels et les irrationnels forment l'ensemble des nombres réels

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Conclusion : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Règles de calcul dans $\mathbb{R}$

Avec les nombres décimaux

La priorité dans un enchainement de calcul.

$A = 5 + (2,8 + 6 \times 1,2)$

$= 5 + (2,8 + 7,2)$

$= 5 + 10$

$= 15$

- **On commence par le calcul entre parenthèse.**
- **Dans un calcul sans parenthèse, on effectue d'abord les puissances puis les produits et les quotients puis les sommes et les différences.**

$B = 13 + 15 - 12 - 13$

$= 13 - 13 + 15 - 12$

$= 15 - 12$

$= 3$

Quand il n' y a que des sommes/différences ou que des produits / quotients, on effectue les opérations dans l'ordre souhaité.

Avec les fractions

Énoncé

Calculer mentalement : a) $A=\frac{3}{7}+\frac{4}{21}-\frac{5}{3}$ b) $B=\frac{7}{3}-\frac{10}{3}\times\frac{1}{5}$ c) $C=\left(\frac{2}{3}-3\right)\div\frac{1}{9}$

$$A=\frac{3}{7}+\frac{4}{21}-\frac{5}{3}$$

$$=\frac{9}{21}+\frac{4}{21}-\frac{35}{21}$$

$$=-\frac{22}{21}$$

$$B=\frac{7}{3}-\frac{10}{3}\times\frac{1}{5}$$

$$=\frac{7}{3}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{1}$$

$$=\frac{7}{3}-\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

- On identifie les opérations à faire en premier (voir la diapositive précédente)
- Pour additionner ou soustraire des fractions , on les réduit au même dénominateur(c'est le ppcm)
- On simplifie les fractions avant de les multiplier.

Puissances de 10 & Écriture scientifique

L'écriture scientifique permet d'écrire les très grands ou petits nombres de manière studieuse et pratique.

p = $a \times 10^n$ avec $1 \leq |a| < 10$ et n entier relatif .

- Si |p| > 1, alors n est positif. $3500000 = 3{,}5 \times 10^6$
- Si |p| < 1, alors n est négatif. $0{,}0042 = 4{,}2 \times 10^{-3}$.