

5.1. Raisonnement direct

On veut montrer que la proposition « $P \Rightarrow Q$ » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple 1 : $x \in \mathbb{R} ; y \in \mathbb{R}$.

Montrer que :

$$\begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ 0 \leq y < 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1.$$

Solution :

$$\begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ 0 \leq y < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Donc :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1.$$

5.2. Raisonnement par disjonction des cas

Si l'on souhaite vérifier une proposition $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E , on montre la proposition pour les x dans une partie A de E , puis pour les x n'appartenant pas à A .

C'est la méthode de disjonction des cas ou méthode cas par cas.

Donc : si on montre que les deux propositions $\neg P \Rightarrow Q$ et $P \Rightarrow Q$ sont vraies (et puisque la dernière proposition est une loi logique), on peut conclure que Q est vraie.

Exemple 1 : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|x^2 - x + 1| \geq |x - 1|.$$

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : $x > 1$.

Alors $|x - 1| = x - 1$.

Calculons alors :

$$(x^2 - x + 1) - (x - 1) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 0.$$

Ainsi :

$$x^2 - x + 1 \geq |x - 1|.$$

Deuxième cas : $x < 1$.

Alors $|x - 1| = -(x - 1)$.

Nous obtenons :

$$(x^2 - x + 1) + (x - 1) = x^2 \geq 0.$$

Et donc :

$$x^2 - x + 1 \geq |x - 1|.$$

Conclusion : Dans tous les cas,

$$|x^2 - x + 1| \geq |x - 1|.$$

Exemple 2 : Montrer que $n(n + 1)(n + 2)$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. On a 3 cas possibles seulement :

$$n = 3k, \quad n = 3k + 1, \quad n = 3k + 2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

1er cas : $n = 3k$.

$$n(n + 1)(n + 2) = 3k(3k + 1)(3k + 2) = 3k',$$

avec

$$k' = k(3k + 1)(3k + 2).$$

Donc $n(n + 1)(n + 2)$ est un multiple de 3.

2e cas : $n = 3k + 1$.

$$\begin{aligned} n(n + 1)(n + 2) &= (3k + 1)(3k + 2)(3k + 3) \\ &= 3(3k + 1)(3k + 2)(k + 1) = 3k', \end{aligned}$$

avec

$$k' = (3k + 1)(3k + 2)(k + 1).$$

Donc $n(n + 1)(n + 2)$ est un multiple de 3.

3e cas : $n = 3k + 2$.

$$\begin{aligned} n(n + 1)(n + 2) &= (3k + 2)(3k + 3)(3k + 4) \\ &= 3(3k + 2)(k + 1)(3k + 4) = 3k', \end{aligned}$$

avec

$$k' = (3k + 2)(k + 1)(3k + 4).$$

Donc $n(n + 1)(n + 2)$ est un multiple de 3.

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n(n + 1)(n + 2) \text{ est un multiple de 3.}$$

5.3. Raisonnement par contraposition

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Donc, si l'on souhaite montrer la proposition « $P \Rightarrow Q$ », on montre en fait que $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est vraie.

Exemple : $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -5$.

Montrer que :

$$x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2.$$

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -5$.

Utilisons un raisonnement par contraposition.

Montrons que :

$$\frac{x+2}{x+5} = 2 \Rightarrow x = -8.$$

On a :

$$\frac{x+2}{x+5} = 2 \Rightarrow x+2 = 2(x+5) \Rightarrow x+2 = 2x+10 \Rightarrow x = -8.$$

Donc :

$$x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2.$$

5.4. Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde repose sur le principe suivant : pour montrer « $P \Rightarrow Q$ », on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction.

Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « $P \Rightarrow Q$ » est vraie.

Exemple : Soient $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que si

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$$

alors $a = b$.

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \quad \text{et} \quad a \neq b.$$

Comme

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a},$$

alors

$$a(1 + a) = b(1 + b),$$

donc

$$a + a^2 = b + b^2,$$

d'où

$$a^2 - b^2 = b - a.$$

Cela conduit à

$$(a - b)(a + b) = -(a - b).$$

Comme $a \neq b$, alors $a - b \neq 0$ et donc, en divisant par $a - b$, on obtient :

$$a + b = -1.$$

La somme des deux nombres positifs a et b ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

Conclusion : si

$$\frac{a}{1 + b} = \frac{b}{1 + a},$$

alors $a = b$.

5.5. Raisonnement par contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une proposition du type

$$\forall x \in E: P(x)$$

est vraie, alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie.

Par contre, pour montrer que cette proposition est fausse, alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. Trouver un tel x , c'est trouver un contre-exemple à la proposition $\forall x \in E: P(x)$.

Exemple : Montrer que la proposition

$$P: \forall x \in [0; 1], \quad x^2 \geq x$$

est fausse.

Solution : Sa négation est :

$$\neg P: \exists x \in [0; 1], \quad x^2 < x.$$

En posant

$$x = \frac{1}{2},$$

on aura

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}.$$

Donc $\neg P$ est vraie, donc P est fausse.

5.6. Raisonnement par équivalence

Le raisonnement par équivalence repose sur le principe suivant : pour montrer que P est vraie, on montre que « $P \Leftrightarrow Q$ » est vraie et Q est vraie ; donc on déduit que P est vraie.

Exemple :

$$\forall x > 0, \quad x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Solution :

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} \geq 2 &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2}{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Et puisque

$$\frac{(x - 1)^2}{x} \geq 0,$$

donc

$$\forall x > 0, \quad x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

5.7. Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une proposition $P(n)$, dépendant de n , est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

1. **Initialisation** : on prouve que $P(0)$ est vraie.
2. **Hérédité** : on suppose $n > 0$ donné avec $P(n)$ vraie.
3. **Transmission** : on démontre alors que la proposition $P(n + 1)$ au rang suivant est vraie.

Enfin, dans la conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^3 + 2n$$

est divisible par 3.

Solution : Montrons

$$\exists k \in \mathbb{N}, \quad n^3 + 2n = 3k.$$

1ère étape — Initialisation : Pour $n = 0$,

$$0^3 + 2 \times 0 = 0,$$

qui est un multiple de 3. Donc $P(0)$ est vraie.

2e étape — Hérédité : Supposons que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \quad n^3 + 2n = 3k.$$

3e étape — Passage de n à $n + 1$: Montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a :

$$\begin{aligned}(n + 1)^3 + 2(n + 1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\ &= (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3 \\ &= 3k + 3n^2 + 3n + 3 = 3(k + n^2 + n + 1).\end{aligned}$$

Posons

$$k' = k + n^2 + n + 1.$$

Alors

$$(n + 1)^3 + 2(n + 1) = 3k'.$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^3 + 2n \text{ est divisible par } 3.$$

Interprétation intuitive — la file de dominos :

Si l'on pousse le premier domino de la file (**initialisation**) et si les dominos sont posés l'un après l'autre d'une manière à ce que la chute d'un domino entraîne la chute de son suivant (**hérédité**), alors tous les dominos de la file tombent (**conclusion**).