



ARITHMÉTIQUE DANS IN

Objectifs de la leçon :

Reconnaître les entiers naturels, utiliser la parité, maîtriser les notions de multiple et de diviseur, appliquer les critères de divisibilité, reconnaître et factoriser les nombres premiers, calculer un PGCD et un PPCM, et utiliser l'algorithme d'Euclide.

1. L'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$

Définition

L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- 0 est l'entier naturel nul.
- Les éléments de $\mathbb{N}^*$ sont les entiers naturels non nuls : $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- Exemple : $7 \in \mathbb{N}$.
- Exemple : $-8 \notin \mathbb{N}$.

2. Nombres pairs et nombres impairs

Définition. Soit n un entier naturel. On dit que n est pair s'il existe un entier naturel k tel que :

$$n = 2k$$

De même, n est impair s'il existe un entier naturel k tel que :

$$n = 2k + 1$$

À retenir : Tout entier naturel est soit pair, soit impair

Exemples

- 17 est impair car $17 = 2 \times 8 + 1$
- 66 est pair car $66 = 2 \times 33$

Démonstration-type : le carré d'un nombre pair est pair

Soit n un nombre pair. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$

Alors : $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$

Comme $2k^2$ est un entier, n^2 est pair.

3. Multiples et diviseurs

Définition. Soient a et b deux entiers. S'il existe un entier k tel que : alors :

$$a = b \times k$$

- b est un diviseur de a ;
- b divise a ; on écrit $b \mid a$
- a est divisible par b ;
- a est un multiple de b .

Exemple

$$44 = 4 \times 11$$

- 4 et 11 sont des diviseurs de 44.
- 44 est un multiple de 4.
- 11 divise 44.

Remarque : Le reste de la division euclidienne de a par b est nul lorsque b est un diviseur de a . Pour tout entier naturel n non nul, 1 et n sont des diviseurs de n .

Lien avec la division euclidienne

Dans le cas où la division de a par b est exacte, le reste est nul :

$$a = bq + r \text{ avec } r = 0$$

Ainsi, **b divise a** si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

4. Critères de divisibilité

Pour un entier naturel n , on utilise les critères suivants :

Divisible par	Critère
2	son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
3	la somme de ses chiffres est divisible par 3.
4	le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
5	son chiffre des unités est 0 ou 5.
9	la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exemples

- 4725 est divisible par 5 car son chiffre des unités est 5.
- 4725 est divisible par 3 et par 9 car $4 + 7 + 2 + 5 = 18$, et 18 est divisible par 3 et par 9.
- 1628 est divisible par 2 car son chiffre des unités est 8.
- 1628 est divisible par 4 car 28, formé par ses deux derniers chiffres, est divisible par 4.

5. Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers

Définition. Un nombre premier est un entier naturel supérieur ou égal à 2 qui possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Attention : 1 n'est pas un nombre premier car il ne possède qu'un seul diviseur.

Les dix premiers nombres premiers sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Test pour déterminer si un nombre est premier

Propriété. Pour déterminer si un entier $n \geq 2$ est premier, il suffit de tester les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$.

Méthode

1. Calculer une valeur approchée de $\sqrt{n}$.
2. Lister les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$.
3. Tester la divisibilité de n par chacun d'eux.
4. Si aucun ne divise n , alors n est premier. Si l'un d'eux divise n , alors n n'est pas premier.

Exemple : montrer que 503 est premier

$$\sqrt{503} \approx 22,4$$

Il suffit donc de tester les nombres premiers **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19**.

- 503 n'est pas divisible par 2 : il est impair.
- 503 n'est pas divisible par 3 : $5 + 0 + 3 = 8$.
- 503 n'est pas divisible par 5 : son chiffre des unités n'est ni 0 ni 5.
- Les divisions par 7, 11, 13, 17 et 19 donnent des restes non nuls.

Conclusion 503 est un nombre premier.

Décomposition en facteurs premiers

Propriété. Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Exemple : décomposer 640 (voir vidéo sur monecole.casa)

$$160 = 16 \times 10 = 2^4 \times 2 \times 5 = 2^5 \times 5 \quad \text{on pose}$$

On divise successivement par des nombres premiers, jusqu'à 1.

Exemple : décomposer 1344

$$\begin{aligned} 1344 &= 2 \times 672 = 2^2 \times 336 = 2^3 \times 168 = 2^4 \times 84 = 2^5 \times 42 = 2^6 \times 21 \\ &= 2^6 \times 3 \times 7 \end{aligned}$$

160	2
80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

Méthode On divise successivement par les plus petits nombres premiers possibles : 2, puis 3, puis 5, etc., jusqu'à obtenir 1.

6. PGCD et PPCM

6.1 PGCD

Définition. Le PGCD de deux entiers naturels non nuls a et b est le plus grand de leurs diviseurs communs. On le note :

$$PGCD(a ; b)$$

Exemple

Les diviseurs de 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Les diviseurs de 15 sont : 1, 3, 5, 15.

$$PGCD(12 ; 15) = 3$$

Nombres premiers entre eux

Définition. Deux entiers naturels non nuls sont premiers entre eux lorsque leur PGCD est égal à 1.

$$PGCD(8 ; 15) = 1$$

Donc 8 et 15 sont premiers entre eux.

6.2 PPCM

Définition. Le PPCM de deux entiers naturels non nuls a et b est le plus petit multiple commun non nul de a et b . On le note :

$$PPCM(a ; b)$$

Exemple

Multiples de 12 : 12, 24, 36, 48, 60, ...

Multiples de 8 : 8, 16, 24, 32, 40, 48, ...

$$PPCM(12 ; 8) = 24$$

Calcul à partir des décompositions en facteurs premiers

Si deux nombres sont écrits comme produits de facteurs premiers :

$$PGCD(a ; b) = \text{produit des facteurs communs affectés des plus petits exposants}$$

$$PPCM(a ; b) = \text{produit des facteurs affectés des plus grands exposants}$$

7. Algorithme d'Euclide et PGCD

Principe. L'algorithme d'Euclide permet de calculer le PGCD de deux grands entiers en effectuant une suite de divisions euclidiennes. Le PGCD est le dernier reste non nul.

Exemple : calcul de PGCD(1053 ; 325)

$$1053 = 3 \times 325 + 78$$

$$325 = 4 \times 78 + 13$$

$$78 = 6 \times 13 + 0$$

Conclusion Le dernier reste non nul est 13, donc $\text{PGCD}(1053 ; 325) = 13$.

Méthode à retenir

5. Effectuer la division euclidienne du plus grand nombre par le plus petit.
6. Diviser ensuite le diviseur précédent par le reste obtenu.
7. Continuer jusqu'à obtenir un reste nul.
8. Le dernier reste non nul est le PGCD.

8. Fraction irréductible

Propriété. Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux, c'est-à-dire lorsque leur PGCD vaut 1.

Exemple

$$\frac{312}{1008} = \frac{2^3 \times 3 \times 13}{2^4 \times 3^2 \times 7} = \frac{13}{2 \times 3 \times 7} = \frac{13}{42}$$

Idée essentielle Pour rendre une fraction irréductible, on divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

9. Synthèse — l'essentiel à connaître

Notion	À retenir
Entier pair	$n = 2k$
Entier impair	$n = 2k + 1$
b divise a	$a = bk$ pour un entier k
Divisibilité par 2	chiffre des unités $\in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
Divisibilité par 3	somme des chiffres divisible par 3
Divisibilité par 4	les deux derniers chiffres forment un multiple de 4
Divisibilité par 5	chiffre des unités égal à 0 ou 5
Divisibilité par 9	somme des chiffres divisible par 9
Nombre premier	exactement deux diviseurs : 1 et lui-même
PGCD	plus grand diviseur commun

PPCM	plus petit multiple commun non nul
Algorithme d'Euclide	dernier reste non nul = PGCD

10. Exercices d'entraînement

Ces exercices reprennent les types de tâches présents dans les documents fournis.

1. Écrire les dix premiers multiples de 4.
2. Déterminer si 127 est pair ou impair et justifier à l'aide d'une écriture littérale.
3. Dire si 4725 est divisible par 2, 3, 4, 5 et 9. Justifier.
4. Décomposer 840 et 1344 en facteurs premiers.
5. Dire si 487 est premier en utilisant le test de primalité.
6. Prouver que 301 n'est pas premier.
7. Déterminer PGCD(12 ; 15) et PGCD(1053 ; 325).
8. Déterminer PPCM(12 ; 8).
9. Réduire une fraction et préciser si elle est irréductible. $\frac{280}{182}$
10. Montrer que la somme de deux multiples d'un même entier a est encore un multiple de a.

Demander la correction sur : <https://monecole.casa>